Λύσεις Μαθηματικά Προσανατολισμού
Τετάρτη 16/6/21

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23
Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτω $x+1=u$ άρα $x=u-1$

Άρα $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x} \Rightarrow f(u)=u\cdot e^{-(u-1)} \Rightarrow f(u)=u\cdot e^{1-u}$

Άρα $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$

Β2. $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$

x	$-\infty$	1 $\qquad$ $+\infty$
e^{1-x}	+	+
$1-x$	+	-
f'	+	-
f	↗	↘

Β3. $f''(x)=-e^{1-x}(1-x)-e^{1-x}=e^{1-x}(x-2)$

x	$-\infty$	2 $\qquad$ $+\infty$
e^{1-x}	+	+
$x-2$	-	+
f''	-	+
f	∩	∪

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} \xRightarrow{-\infty\cdot(+\infty)} -\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$ $(x'x)$

Β4. i)

$$\left.\begin{matrix} A_1=(-\infty,1) \\ f \nearrow \text{ στο } A_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_1=f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x), f(1)\right)=(-\infty,1)$$

$$\left.\begin{matrix} A_2=[1,+\infty) \\ f \searrow \text{ στο } A_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_2=f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x), f(1)\right]=(0,1]$$

Άρα αν $A=D_f=(-\infty,+\infty)$ τότε το σύνολο τιμών της f θα είναι
$f(A)=(-\infty,1]$

ii)

Αν $\lambda \leq 0$ τότε $\lambda \in B_1$ και $\lambda \notin B_2$ άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία ρίζα.
Αν $0 < \lambda < 1$ τότε $\lambda \in B_1$ και $\lambda \in B_2$ άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο ρίζες.
Αν $\lambda = 1$ τότε $\lambda \notin B_1$ και $\lambda \in B_2$ άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία ρίζα
Αν $\lambda > 1$ τότε $\lambda \notin B_1$ και $\lambda \notin B_2$ άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζες

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, συνεχής για $x < 0$ ως πολυωνυμική και συνεχής για $x \in (0, \frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική ,άρα η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3-3x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(ax^2-3x-1)}{x} = \lim_{x\to 0^-}(ax^2-3x-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} = 0$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$,άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ2.i)

f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ και
$f(0) = 1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$,άρα $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ όποτε η f δεν ικανοποιεί μία από τις προϋποθέσεις του Rolle

ii)

<u>για $x > 0$:</u>
$f'(x) = -\eta\mu x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\eta\mu x = 0 \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Rightarrow x = \kappa\pi$$

Άρα έχουμε $0 < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 < \kappa\pi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 < \kappa < \frac{3}{2}$ άρα $\kappa = 1$
Άρα $x = \pi$, άρα $\xi = \pi$

Γ3. <u>Για $x < 0$:</u>
$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$

$3ax^2 - 6x - 1 = 0$
$\Delta = 12(3+\alpha) < 0$ και $\alpha < -3 < 0$ άρα $3ax^2 - 6x - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$
Άρα δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Γ4.

<u>Για $x < 0$:</u>
$f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 0)$,άρα
$f(A_1) = \left(f(0), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right) = (1, +\infty)$
Άρα $f(x) > 1 > -1$ για $x < 0$

Για $x \in (0, \frac{3\pi}{2}]$, $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \leq\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$
Για $x = 0$, $f(0) = 1 > -1$

Άρα $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $h(x) = lnx - \frac{1}{x}$, $x > 0$

$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$h(1) = -1$ και $h(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

- h συνεχής στο $[1, e]$
- $h(1) \cdot h(e) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε

$h(x_0) = 0 \Rightarrow lnx_0 - \frac{1}{x_0} = 0 \Rightarrow lnx_0 = \frac{1}{x_0}$

Δ2. $f'(x) = lnx_0 - \frac{1}{x}$

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι $f'(x_0) = 0$

Για $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$

Για $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(x_0, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$.

$f(x_0) = lnx_0(x_0 + 1) - lnx_0 - 1 = \frac{1}{x_0}(x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1 =$

$= 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$

Δ3.

Για $x \leq 0$ η εξίσωση $g(x) = h(x)$ είναι αδύνατη γιατί

$g(x) \leq 0$ και $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$

Για $x > 0$ έχουμε :

$$g(x) = h(x) \Rightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Rightarrow ln(xe^{-x}) = ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Rightarrow$$
$$lnx + lne^{-x} = (x+1)ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Rightarrow lnx - x = (x+1)(lnx_0 - lne) \Rightarrow$$
$$lnx - x = lnx_0(x+1) - x - 1 \Rightarrow lnx_0(x+1) - lnx - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_0$$

Άρα $g(x_0) = h(x_0)$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x = x_0$ θα πρέπει επιπλέων να ισχύει

$g'(x_0) = h'(\mathrm{x}_0)$

Έχουμε αποδείξει ότι

$$lnx_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0 lnx_0 = 1 \Rightarrow lnx_0{}^{x_0} = lne \Rightarrow x_0{}^{x_0} = e \quad (1)$$

$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = \frac{1-x}{e^x}$

Άρα $g'(x_0) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$ (2)

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} ln\frac{x_0}{e} = \frac{{x_0}^{x+1}}{e^{x+1}}(lnx_0 - lne) = \frac{x_0 \cdot {x_0}^x}{e^x \cdot e}\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) =$$
$$= \frac{x_0 \cdot {x_0}^x}{e^x \cdot e}\left(\frac{1-x_0}{x_0}\right) = \frac{{x_0}^x}{e^x \cdot e}(1-x_0)$$

Άρα $h'(x_0) = \frac{{x_0}^{x_0}}{e^{x_0} \cdot e}(1-x_0) \overset{(1)}{\Rightarrow} h'(x_0) = \frac{e}{e^{x_0} \cdot e}(1-x_0) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = g'(x_0)$

Δ4.

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το σημείο $x = x_0$ είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε υπάρχει το όριο

$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \lambda$ και λ πραγματικός αριθμός

Η απόσταση των σημείων Α και Β δίνεται από τον τύπο

$$d(x) = \sqrt{(x-x)^2 + \left(f(x) - \varphi(x)\right)^2} = \sqrt{\left(f(x) - \varphi(x)\right)^2} = |f(x) - \varphi(x)| =$$

$= f(x) - \varphi(x)$ γιατί $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε $x > 0$

Η απόσταση των σημείων Α και Β γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, άρα

$d(x) \geq d(x_0)$ για κάθε $x > 0$

Άρα $d(x) \geq d(x_0) \Rightarrow f(x) - \varphi(x) \geq f(x_0) - \varphi(x_0) \Rightarrow f(x) \geq \varphi(x) - \varphi(x_0)$

Για $x < x_0$:

$$\frac{f(x)}{x-x_0} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{x-x_0} \leq \lim_{x\to x_0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$$

$f'(x_0) \leq \lambda \Rightarrow 0 \leq \lambda$ (1)

Για $x > x_0$:

$$\frac{f(x)}{x-x_0} \geq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{x-x_0} \geq \lim_{x\to x_0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$$

$f'(x_0) \geq \lambda \Rightarrow 0 \geq \lambda$ (2)

Από (1) , (2) έχουμε ότι $\lambda = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = 0 \Rightarrow \varphi'(x_0) = 0$

Άρα το σημείο $x = x_0$ είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Γιώργος Βλόντζος
Γιώργος Κυριαζής
Μαθηματικοί