ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.
Α1.ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ.111
Α2. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ.104
Α3. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ.128
Α4.
α. Λ
β. Λ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β
Β1. $\begin{cases} x \in Dh \\ h(x) \in Dg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ lnx \in R \end{cases}$ ⇒X>0

Αραf(x)=$\frac{4-e^{2lnx}}{e^{lnx}}$=$\frac{4-x^2}{x}$με χ>0

Β2.$f'_{(x)} = \frac{-2x \cdot x - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-(x^2+4)}{x^2} < 0 \;\; στο \; (0, +\infty)$

Επομενως η f είναι γνησια φθινουσα στο $(0, +\infty)$

e<π αρα f(e)>$f(\pi) \Rightarrow \frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi}$ και επειδη

4-e^2<0 προκυπτει ότι $\frac{\pi}{e} < \frac{4-\pi^2}{4-e^2}$

Β3.ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Η f είναι συνεχης στο (0,+∞) ως ρητη $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{4-x^2}{x} = +\infty$

Αρα η χ=0 είναι κατακορυφη ασυμπτωτη

Πλαγιαασυμπτωτη

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to t} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(\chi)-\lambda\chi) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{4-x^2}{x}+\chi) = 0$$

Αρα η y=-x είναι η πλαγια ασυπτωτη της f στο +∞

B4.|συν(1+χ²)|≤1 ⇒ $|\frac{\sigma\upsilon\nu\ (1+x^2}{f(x)}|\leq|\frac{1}{f(x)}|$

Όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$=0 αρα από το κριτηριο παρεμβολης θα είναι και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{συν}(1+\chi 2)}{f(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Rightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx = 1 \Rightarrow \int_2^3 (1+ax)dx = 1 \Rightarrow$$

$$\left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Rightarrow 3+\frac{9a}{2}-\left(2+\frac{4a}{2}\right) = 1 \Rightarrow 3+\frac{9a}{2}-2-\frac{4a}{2} = 1 \Rightarrow a = 0$$

Γ2.

i)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x-2) = 1-2 = -1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x} = -1$$

Άρα $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$,άρα ορίζεται εφαπτομένη της f στο $x_0 = 1$

ii)

$\varepsilon: y-f(1) = f'(1)(x-1)$

$y-1 = -(x-1)$

$y = -x+2$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$, τότε

$$\varepsilon\varphi\omega = f'(1) \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Rightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$$

Γ3.

$f'(x) = 2x-3 < 0$ για $x < 1$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, για $x > 1$

$f'(1) = -1$

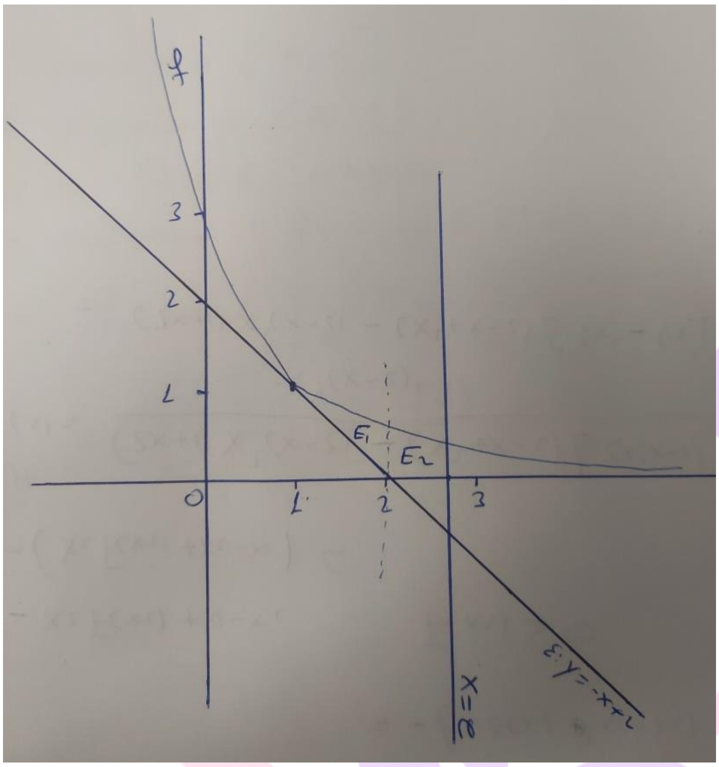
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και ένα προς ένα

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3) = \lim_{x\to-\infty}x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$

Γ4.



Από το σχήμα έχουμε ότι $E(\Omega) = E_1 + E_2 = \int_1^2 \big(f(x) - (-x+2)\big)\,dx + \int_2^e f(x)dx =$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx = \left[lnx + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + [lnx]_2^e =$$

$$= ln2 + 2 - 4 - \left(ln1 + \frac{1}{2} - 2\right) + lne - ln2 = -2 - \frac{1}{2} + 2 + 1 = \frac{1}{2}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

Έστω $g(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}$, με $x \neq 1$ και $\lim_{x\to 1} g(x) = l$

Άρα $f(x) = (x-1)g(x) + 2x$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\big((x-1)g(x) + 2x\big)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow$

$$ln(2-1) - \frac{1}{1} + \kappa = 2 \Rightarrow -1 + \kappa = 2 \Rightarrow \kappa = 3$$

Δ2.

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-2)}$$

x	0 1	2
x-1	-	+
x+2	+	+
x^2	+	+

x-2	-	-
f'	+	-
f	↗	↘

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 = -\infty$, άρα υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) < 0$

$f(1) = 2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 = -\infty$, άρα υπάρχει $\beta < 2$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) < 0$

f συνεχής στο $[\alpha, 1]$
$f(\alpha)f(1) < 0$
Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\alpha, 1) \subseteq (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$ και είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$

f συνεχής στο $[1, \beta]$
$f(1)f(\beta) < 0$
Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1, \beta) \subseteq (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$ και είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2)$

Έστω $x_1 > \frac{1}{3}$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ άρα $f(x_1) > f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$
$0 > ln\left(2-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 \Rightarrow 0 > ln\frac{5}{3}$ άτοπο γιατί
$\frac{5}{3} > 1 \Rightarrow ln\frac{5}{3} > ln1 \Rightarrow ln\frac{5}{3} > 0$

Δ3. $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ στο $(0,1)$, άρα f' γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$

f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$
f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$
Άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - 0}{\frac{1}{3} - \frac{3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$ και είναι μοναδικό γιατί f' γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$

Δ4.
i)

F και G αρχικές της f άρα θα ισχύει $F(x) = G(x) + c$
για $x = x_1$: $F(x_1) = G(x_1) + c \Rightarrow 0 = G(x_1) + c \Rightarrow G(x_1) = -c$

για $x = x_2$: $F(x_2) = G(x_2) + c \Rightarrow F(x_2) = 0 + c \Rightarrow F(x_2) = c$

άρα $F(x_2) + G(x_1) = c + (-c) = c - c = 0$

ii) Έχουμε το πρόσημο της f άρα και τη μονοτονία της F

	0 $\quad$ x_1		1	x_2 $\quad$ 2
f	↗	↗	↘	↘
f	-	+	+	-
F	↘	↗	↗	↘

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2) \Rightarrow F(x_2) > 0$$

Έστω $h(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x$
$h'(x) = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$ γιατί $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ και $x_1 > 0$ και $x_2 > 0$ **,** άρα h γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$

$$h(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2G(x_1) + x_1 - x_2$$
$$= -x_2F(x_2) - (x_2 - x_1) < 0$$
$$h(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$$

h συνεχής στο $[x_1, x_2]$
$h(x_1)h(x_2) < 0$
άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$ και είναι μοναδικό γιατί η h γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Γιώργος Κυριαζής
Γιώργος Βλόντζος
Μαθηματικοί