ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ 76
Α2. Σελ 155
Α3. Σελ 216
Α4. **α.** Σ
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Για την f πρέπει $h(x) \neq 0 => x \neq 1,\ D_g = D_h = [1,+\infty)$
Άρα $D_f = (1,+\infty)$
και $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \cdots = \frac{x+1}{x-1}$
Για την $r,\ D_g = D_h = [1,+\infty)$ Άρα $D_r = [1,+\infty)$
και $r(x) = g(x)h(x) = \cdots = x - \frac{1}{x}$

Β2.

Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2) => x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 , άρα και άρα και αντιστρέψιμη
Θέτω $y = f(x)$

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$
$$xy - y = x + 1$$
$$xy - x = y + 1$$
$$x(y-1) = y + 1 \qquad (y \neq 1)$$
$$x = \frac{y+1}{y-1} \qquad \left(\frac{y+1}{y-1} > 1 => y > 1\right)$$
$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$ με $D_{f^{-1}} = D_f = (1,+\infty)$

Β3.

$\lim_{x\to+\infty} r(x) = +\infty$ άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη
$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = 1 = \lambda \quad \textit{και} \lim_{x\to+\infty}(r(x) - x) = 0$
Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$

Β4.

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x)$$

$x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$
$x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x}$
$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$
$x^2(x-4) - (x-4) = 0$
$(x-4)(x^2-1) = 0$
Άρα $x = 4$ γιατι $x = 1$ και $x = -1$ απορρίπτονται

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>
Γ1.
Η f είναι συνεχής , άρα $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow e^{\lambda} = 1 + \lambda$
Έστω $h(x) = e^x - 1 - x$ m$h'(x) = e^x - 1$ άρα έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με $h(0) = 0$, άρα η εξίσωση $e^{\lambda} = 1 + \lambda$ έχει μοναδική λύση την $\lambda = 0$
Γ2.
<u>Για $x < 2$:</u>
$f'(x) = -2 < 0$
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2)$

<u>Για $x > 2$:</u>
$f'(x) = -2x + 4$
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$
Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = [0, +\infty)$
Στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(0) = 5$

Γ3.
i. $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -2$ και $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$
Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, άρα ούτε και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$,άρα δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ
ii.
$\lambda_{\Delta E} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = -\frac{5}{3}$
Πρέπει $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$
<u>Για $x < 2$:</u>
$f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Rightarrow -2 = -\frac{5}{3}$ αδύνατο

<u>Για $x > 2$:</u>
$f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Rightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Rightarrow \xi = \frac{17}{6} < \frac{18}{6} = 3$
Άρα υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ και $\xi = \frac{17}{6}$

Γ4.
Έστω $M\big(2, y(t)\big)$ και $y'(t) = 0.5$
Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ τέμνει την C_f, τότε $y(t_0) = f(2) = 1$
Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΜ τη χρονική στιγμή t_0,έχουμε $OM = \sqrt{5}$
Άρα $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t_0))} = \frac{5}{4}$

$\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))}\omega'(t) = \frac{y'(t)}{2}$ και για $t = t_0$

$\omega'(t_0) = 0.2rad/sec$

ε

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

$f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2}$

Άρα η f στο$(0,e]$ είναι γνησίως αύξουσα και στο $[e,+\infty)$ γνησίως φθίνουσα, άρα στο $x_1 = e$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το και αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1+\frac{1}{e}]$

τότε $f(e) = 1 + \frac{1}{e} \Rightarrow a = 1$

Δ2.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \\ A_2 = (e,+\infty) \\ f: \searrow \sigma\tau o\ A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(A_2) = \left(1, 1+\frac{1}{e}\right)$$

Το μηδέν δεν ανήκει στο A_2 άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο A_2

$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ γιατί $e < 4 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < ln2 \Rightarrow -ln2 + \frac{1}{2} < 0$

$f(1) = 1 > 0$

f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subseteq (0,e)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) f(1) < 0$

Άρα από Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \subseteq (0,e)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ και είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e)$ άρα και στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Δ3.

i.

Έστω $h(x) = f(x) - f(4) = \frac{2lnx - xln2}{2x}$

με $h'(x) = f'(x)$, άρα η h έχει την ίδια μονοτονία με την f

$h(4) = f(4) - f(4) = 0$, το $4 \in (e,+\infty)$, και η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e,+\infty)$, άρα η λύση $x_2 = 4$ είναι μοναδική στο $(e,+\infty)$

$h(2) = f(2) - f(4) = \frac{ln2+2}{2} - \frac{ln4+4}{4} = \frac{ln2+2}{2} - \frac{2ln2+4}{4} = \frac{ln2+2}{2} - \frac{2(ln2+2)}{4} = 0$

το $2 \in (0,e)$, και η h είναι γνησίως αύξουσα στο$(0,e)$,

άρα η λύση $x_1 = 2$ είναι μοναδική στο $(0,e)$

άρα για $x < 2 \overset{h;\nearrow}{\Longrightarrow} h(x) < h(2) \Rightarrow h(x) < 0$

και για $x > 4 \overset{h:\searrow}{\Longrightarrow} h(x) < h(4) \Rightarrow h(x) < 0$
για $2 < x < e \overset{h;\nearrow}{\Longrightarrow} h(2) < h(x) < h(e) \Rightarrow 0 < h(x)$
για $e < x < 4 \overset{h:\searrow}{\Longrightarrow} h(e) > h(x) > h(4) \Rightarrow h(x) > 0$
Άρα για $x \in [2,4]$, $h(x) \geq 0$

ii.

$$2^x \leq x^2 \Rightarrow xln2 \leq 2lnx \Rightarrow xln2 - 2lnx \leq 0 \Rightarrow 2lnx - xln2 \geq 0 \Rightarrow \frac{2lnx - xln2}{2x} \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [2,4]$$

Δ4.

$E = \int_{-ln2}^{0} |g(x)| dx$

Θέτω $e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$
Όταν $x_1 = -ln2 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}$
και $x_2 = 0 \Rightarrow u_2 = 1$

άρα $E = \int_{-ln2}^{0} \left| f(e^x) \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \int_{-ln2}^{0} \left| f(e^x) \frac{1-x}{e^x} \right| \frac{1}{e^x} e^x dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \frac{1-lnu}{u} \right| \frac{1}{u} du =$
$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \frac{1-lnu}{u^2} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u) f'(u)| du$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και
f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$
Άρα $\frac{1}{2} < x < x_0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$
$x_0 < x < 1 \Rightarrow f(x_0) < f(x) < f(1) \Rightarrow 0 < f(x)$

Άρα

$$E = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) f'(x) dx + \int_{x_0}^{1} f(x) f'(x) dx = -\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{x_0}^{1} = \cdots$$

Βλόντζος Γεώργιος
Τριβυζαδάκης Μανώλης