ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ 31 Σχ. Βιβλίο

Α2. α. Ορισμός σελ 65 Σχ. Βιβλίο

Α2. β. Τύπος σελ 87 Σχ. Βιβλίο

Α3.

α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = x^2 - 6x + 5$

Β2. Για $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ Άρα } x_1 = 1 \text{ ή } x_1 = 5$$

	-∞		1		5		+∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα για x $\in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Για $x \in [1,5]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Για $x = 1$ η f(x) παρουσιάζει τοπ. μέγιστο το $f(1) = \frac{8}{3}$

Για $x = 5$ η f(x) παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο το $f(5) = -8$

Β3.

Μορφή: $y = \lambda x + \beta$

$$\lambda = f'(0) = 5$$

$$y_0 = f(0) = \frac{1}{3}$$

$$Άρα: y_0 = \lambda x_0 + \beta \Leftrightarrow \frac{1}{3} = 5 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

$$Άρα\ η\ ευθεία\ είναι\ η: y = 5x + \frac{1}{3}$$

Β4. Το συγκεκριμένο όριο ισούται με το $f'(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$s = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+7)}{2\cancel{(x-1)}} = \frac{1+7}{2} = 4$$

Γ2.

Θεωρώντας ότι το κ είναι θετικός πραγματικός αριθμός (άρα και η μέση τιμή το ίδιο)

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{4}{\bar{x}} \Leftrightarrow 20\bar{x} = 400 \Leftrightarrow \bar{x} = 20$$

Γ3.

Θεωρώντας ότι το κ είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} \Leftrightarrow 20 = \frac{22 + 18 + 20 + \kappa + 14 + 16}{5} \Leftrightarrow 22 + 18 + 20 + \kappa + 14 + 16 = 100 \Leftrightarrow \kappa = 10$$

Για να βρούμε τη διάμεσο τοποθετούμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις. Η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση γιατί έχω περιττό αριθμό παρατηρήσεων. Άρα δ=18.

Γ4. Έστω $t_i{}'$ οι νέες τιμές. Θα ισχύει ότι $t_i' = t_i + 0{,}1 \cdot t_i = 1{,}1 t_i$

Άρα παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές πολλαπλασιάζονται με το 1,1. Άρα σύμφωνα με εφαρμογή την ίδια μεταβολή θα έχει και η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση. Άρα: $s' = 1{,}1 \cdot s$ και $\bar{x}' = 1{,}1 \cdot \bar{x}$

Ο συντελεστής μεταβολής θα παραμείνει σταθερός. $CV\%' = \frac{s'}{\bar{x}'} \cdot 100 = \frac{1{,}1 \cdot s}{1{,}1 \cdot \bar{x}} \cdot 100 = 20\%$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$AB^2 = AO^2 + BO^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$

Πρέπει: $100 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 100$ άρα $-10 \leq x \leq 10$ και $x > 0$

Άρα $D_f = (0{,}10]$

Δ2.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100-x^2}} \cdot (100-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής είναι το $f'(8) = \frac{-8}{\sqrt{100-8^2}} = \frac{-8}{\sqrt{36}} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

Δ3.

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6} = \lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)} =$$

$$= -\lim_{x\to 6}\frac{(6-x)(6+x)}{(6-x)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)} = -\frac{6+6}{16} = -\frac{3}{4}$$

Δ4. Ένας τρόπος αιτιολόγησης είναι μέσω της μονοτονίας

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(x) > 0$$

$$\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}} > 0$$

$$-x \cdot \sqrt{100-x^2} > 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 10 \text{ ή } x = -10$$

	$-\infty$ -10	0	10	$+\infty$
$-x$	+	+	-	-
$\sqrt{100-x^2}$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$			$\searrow$	

Παρατηρούμε ότι η f στο πεδίο ορισμού της είναι γν. φθίνουσα άρα, με δεδομένο ότι :

$$x_1 < x_3 < x_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$