ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ. 186
Α2. Σελ. 76
Α3. Σελ. 161
Α4. **α)** Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$
$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$
Από Θεώρημα Fermat $f'(1) = 0 \Rightarrow \alpha = -6$

Β2. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$ ή $x = 1$
Άρα για $x \in \cup\ (3, +\infty)$ $f'(x) > 0$ και για $x \in (1,3)$ $f'(x) < 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
$f(0) = -3$
$f(1)$ =1
$f(3) - 3$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{matrix} A_1 = (0,1) \\ f: \nearrow \end{matrix}\right\} f(A_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right) = (-\infty, 1)$$

$$\left.\begin{matrix} A_2 = [1,3] \\ f: \searrow \end{matrix}\right\} f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$$

$0 \in f(A_1)$, $0 \in f(A_2)$ *και* $0 \in f(A_1)$ άρα η $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές ρίζες και είναι μοναδικές γιατί η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε διάστημα

Β3. $f''(x) = 6x - 12$
Για $x \geq 2$ η είναι κυρτή και για $x \leq 2$ η f είναι κοίλη, άρα το $\big(2, f(2)\big)$ είναι σημείο καμπής

Β4. Η εφαπτωμένη της C_f στο Α είναι
$\varepsilon_1 : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Η εφαπτωμένη της C_g στο Β είναι
$\varepsilon_2 : y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow y = \big(1 + f'(\xi)\big)x - \xi f'(\xi) + f(\xi)$
Λύνοντας το σύστημα των ε_1 ,ε_2 αποδεικνύεται ότι τέμνονται σε σημείο με τετμημένη $x = 0$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΠΕΡΙ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΓΙΑ ΣΗΜΕΡΑ & ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΛΛΟΝ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ άρα f συνεχής στο $x = 0$

$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$

Γ2. $\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = 0$ γιατί

$$-1 \le \eta\mu x \le 1 \Rightarrow -e^x \le e^x \eta\mu x \le e^x$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} -e^x = 0 = \lim_{x\longrightarrow -\infty} e^x$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = 0$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x}{\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\right)} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2} = \beta$$

Άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$

Γ3. Έστω $h(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \le 0$

$h(-\pi) = \pi - \frac{1}{2} > 0$

$h(0) = -\frac{1}{2} < 0$

h συνεχής στο $[-\pi, 0]$

$h(-\pi)h(0) < 0$

άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi) = 0$

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

$$y'(t) = \frac{2x(t)x'(t)+x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = \frac{x'(t)(2x(t)+1)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$$

Έστω για $t = t_0$ να ισχύει $y'(t_0) = x'(t_0) \Rightarrow \frac{x'(t_0)(2x(t_0)+1)}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} = x'(t_0) \Rightarrow$

$$\frac{2x(t_0)+1}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}}=1 \Rightarrow 2x(t_0)+1=2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)} \Rightarrow$$
$4x^2(t_0)+4x(t_0)+1=4x^2(t_0)+4x(t_0) \Rightarrow 1=0$ *άτοπο*

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

$$(x^{lnx})'=\left(e^{(lnx)^2}\right)'=x^{lnx}2lnx\frac{1}{x}$$

$$g'(x)=\frac{f(x)x^{lnx}-F(x)x^{lnx}2lnx\frac{1}{x}}{(x^{lnx})^2}=\frac{x^{lnx}\left(\frac{xf(x)-2F(x)lnx}{x}\right)}{(x^{lnx})^2}=0$$

Άρα η g είναι σταθερή

Δ2.

i. Για $x=1$: $1f(1)=2F(1)ln1 \Rightarrow f(1)=0$

$$f'(1)=2 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{lnx}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{lnx}{x-1}}=\frac{2}{1}=2$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}=1$

ii. $f(x)=\frac{2F(x)lnx}{x}$

$$2=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{lnx}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2F(x)lnx}{x}}{lnx}=\lim_{x\to 1}\frac{2F(x)}{x}=2F(1) \Rightarrow F(1)=1$$

$g(x)=c \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{lnx}}=c$

Για $x=1$: $\frac{F(1)}{1}=c \Rightarrow c=1$

Άρα $\frac{F(x)}{x^{lnx}}=1 \Rightarrow F(x)=x^{lnx}$

Δ3.

$F'(x)=(x^{lnx})'=\left(e^{(lnx)^2}\right)'=x^{lnx}2lnx\frac{1}{x}$

Για $0<x<1 \Rightarrow F'(x)<0$ άρα F:↘

Για $x>1 \Rightarrow F'(x)>0$ άρα F:↗

<u>Για $0<x<1$:</u>

$x^2<x \overset{F:\searrow}{\Longrightarrow} F(x^2)>F(x) \Rightarrow F(x^2)-F(x)>0$

$-(x-1)^2<0$

Άρα η εξίσωση $F(x^2)=F(x)-(x-1)^2$ δεν έχει λύση στο $(0,1)$

<u>Για $x>1$:</u>

$x^2>x \overset{F:\nearrow}{\Longrightarrow} F(x^2)>F(x) \Rightarrow F(x^2)-F(x)>0$

$-(x-1)^2<0$

Άρα η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ δεν έχει λύση στο $(1, +\infty)$

Για $x = 1$:
Ισχύει η ισότητα

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση το $x = 1$

Δ4.
Ξέρουμε ότι

$$e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^{(lnx)^2} \geq (lnx)^2 + 1 \Rightarrow \int_1^e e^{(lnx)^2} dx > \int_1^e ((lnx)^2 + 1) dx$$

$E > \int_1^e (lnx)^2 dx + \int_1^e 1dx$
$E > [x(lnx)^2]_1^e - \int_1^e x2lnx\frac{1}{x}dx + e - 1$
$E > e - 2\int_1^e lnxdx + e - 1$
$E > 2e - 1 - 2[xlnx]_1^e + 2\int_1^e 1dx$
$E > 2e - 1 - 2e + 2[x]_1^e$
$E > -1 + 2(e-1)$
$E > -1 + 2e - 2$
$E > 2e - 3$