ΘΕΜΑ Α

Α1.

$$f_1+f_2+f_3+\dots+f_k=\frac{\nu_1}{\nu}+\frac{\nu_2}{\nu}+\frac{\nu_3}{\nu}+\dots+\frac{\nu_k}{\nu}=\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\dots+\nu_k}{\nu}=\frac{\nu}{\nu}=1$$

Α2.

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση όταν ν περιττός αριθμός, ενώ είναι το ημιάθροισμα των 2 μεσαίων παρατηρήσεων, όταν ν άρτιος

Α3.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και B, το σύνολο των $x\in A$ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται η συνάρτηση με την οποία κάθε $x\in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται πρώτη παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f'(x)$.

Α4.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x^2 - 2x - 3$

$= x^2 - 2x - 3$

Β2.

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\alpha: 1$
$\beta: -2$
$\gamma: -3$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
$= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$
$= 4 + 12$
$= 16$

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		+	0	−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ	↘	Τ.Ε	↗	

Για $x \in (-\infty, -1]$ η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα
Για $x \in [-1, 3]$ η $f(x)$ είναι γν. φθίνουσα
Για $x \in [3, +\infty)$ η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα
Για $x = -1$ η $f(x)$ παρουσιάζει τοπ. μέγιστο το

$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1$

$= -\frac{1}{3} - \cancel{1} + \frac{3}{1} + \cancel{1} = \frac{8}{3}$

Για $x = 3$ η $f(x)$ παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο, το

$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 - 9 + 1 = \cancel{9} - \cancel{9} - 9 + 1 = -8$

B3.

Μορφη: $y = \lambda x + \beta$

Βρίσκω το $\lambda = f'(0)$ με $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$= \cancel{0^2} - \cancel{2 \cdot 0} - 3$

$= -3$

Βρίσκω το $x_0 = 0$

Βρίσκω το $y_0 = f(0) =$

$= \cancel{\frac{1}{3} \cdot 0^3} - \cancel{0^2} - \cancel{3 \cdot 0} + 1$

$= 1$

Βρίσκω το β

$y_0 = \lambda \cdot x_0 + \beta$

$1 = -3 \cdot 0 + \beta$

$\beta = 1$

Άρα η ευθεία είναι η: $y = -3x + 1$

B4.

$$\lim_{x \to -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{1 \cdot (x-3)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} =$$

$= -1 - 3 = -4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} t_i}{7} = \dfrac{t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7}{7}$

Άρα $4 = \dfrac{4+5+4+k+0+3+7}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = \dfrac{23+k}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 23+k = 28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 28-23 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=5$

Γ2. Για να βρώ τη διάμεσο: τοποθετώ τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$0,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7$

$\delta = t_4$ (η μεσαία παρατήρηση)

Άρα $\delta = 4$

Γ3. $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\overline{x})^2}{7} = \dfrac{(t_1-\overline{x})^2+(t_2-\overline{x})^2+(t_3-\overline{x})^2+(t_4-\overline{x})^2+(t_5-\overline{x})^2+(t_6-\overline{x})^2+(t_7-\overline{x})^2}{7}$

$= \dfrac{\cancel{(4-4)^2}^{\to 0}+(5-4)^2+\cancel{(4-4)^2}^{\to 0}+(5-4)^2+(0-4)^2+(3-4)^2+(7-4)^2}{7}$

$= \dfrac{1+1+16+1+9}{7} = \dfrac{28}{7} = 4$

Γ.4 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4} = 2$

$CV\% = \dfrac{S}{|\overline{x}|}\cdot 100 = \dfrac{2}{4}\cdot 100 = 50\%$

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

$$E = x \cdot y$$

$$x \cdot y = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$$

Άρα η $\Pi = 2x + 2y$

$$\Pi(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x}$$

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}$$

με $x > 0$

Δ2

$$\Pi'(x) = 2 + 200 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2 - \frac{200}{x^2}$$

$$\Pi'(x) > 0$$

$$\frac{2}{1} - \frac{200}{x^2} > 0$$

$$\frac{2x^2 - 200}{x^2} > 0$$

$$x^2 \cdot (2x^2 - 200) > 0$$

$x = 0$

$$2x^2 - 200 = 0$$

$$2x^2 = 200$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm 10$$

Άρα

x	$-\infty$		-10		0		10		$+\infty$
x^2		+		+	0	+		+	
$2x^2-200$		+	0	−		−	0	+	
$\Pi'(x)$						−	0	+	
$\Pi(x)$						↘	Ολ. Ελ	↗	

Για $x \in (0, 10]$ η $\Pi(x)$ είναι γν. φθίνουσα

Για $x \in [10, +\infty)$ η $\Pi(x)$ είναι γν. αύξουσα

Για $x = 10$ η Περίμετρος γίνεται ελάχιστη.

Και επειδή από (α) $y = \frac{100}{x}$

Για $x = 10$ $y = \frac{100}{10} = 10$

Άρα $x = 10$ και $y = 10$

Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3

Ξέρω ότι $x_1 < x_2$ και επειδή $x_1, x_2 \in (0,10)$ στο οποίο η $Π(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι:

$$Π(x_1) > Π(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Π(x_1) - Π(x_2) > 0$$ άρα θετικός ο αριθμητής

Ενώ: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$ άρα αρνητικός ο παρονομαστής.

Άρα $A = \dfrac{Π(x_1) - Π(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ως πηλίκο θετικού με αρνητικό.

Δ4.

$$\lim_{x \to 10} \frac{Π'(x)}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x \to 10} \frac{\frac{2x^2 - 200}{x^2}}{\frac{\sqrt{10x} - 10}{1}}$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{2x^2 - 200}{x^2 \cdot (\sqrt{10x} - 10)} = \lim_{x \to 10} \frac{2(x^2 - 100)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2 (\sqrt{10x} - 10)(\sqrt{10x} + 10)}$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{2 \cdot (x-10)(x+10) \cdot (\sqrt{10x} + 10)}{x^2 \cdot ((\sqrt{10x})^2 - 10^2)}$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{2(x-10)(x+10) \cdot (\sqrt{10x} + 10)}{x^2 \cdot (10x - 100)}$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{2\cancel{(x-10)}(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2 \cdot 10\cancel{(x-10)}}$$

$$= \frac{2 \cdot (10+10) \cdot (\sqrt{10 \cdot 10} + 10)}{10^2 \cdot 10}$$

$$= \frac{2 \cdot 20 \cdot 20}{100 \cdot 10} = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΓΙΑΝΝΟΥΛΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ