

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελ. 133 σχολικού βιβλίου

A2. Σελ. 51 σχολικού βιβλίου

A3. Σελ. 185 σχολικού βιβλίου

A4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_h = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

$$x \geq 2 \text{ και } g(x) > 1 \Rightarrow \sqrt{x-2} + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Άρα $D_h = (2, +\infty)$

$$h(x) = f(g(x)) = 2\ln(g(x) - 1) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2\ln\sqrt{x-2} = \ln\sqrt{x-2}^2 = \ln(x-2)$$

B2.

$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$ για $x > 2$, άρα h : ↗ άρα και $1 - 1$, άρα και αντιστρέψιμη

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

άρα $f(A) = D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$

$$h(x) = y \Rightarrow \ln(x-2) = y \Rightarrow x-2 = e^y \Rightarrow x = e^y + 2 \Rightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2$$

άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$

B3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \frac{f(x)}{x-2} \right) = -\infty \cdot 2 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

i.

Έστω $\kappa \neq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \pm \infty$

Άτοπο γιατί η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, άρα $\kappa = 0$

ii.

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\lambda_\varepsilon = f'(0) \Rightarrow 1 = \mu$$

Γ2.

i.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

X	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	-	+	-	
f	\searrow	\nearrow	\searrow	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = (-\infty, -1) \left. \vphantom{A_1} \right\} \begin{matrix} f: \searrow \\ f: \searrow \end{matrix} \Rightarrow f(A_1) = [-\frac{1}{2}, 0)$$

$$A_2 = [-1, 1] \left. \vphantom{A_2} \right\} \begin{matrix} f: \nearrow \\ f: \nearrow \end{matrix} \Rightarrow f(A_2) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$A_3 = (1, +\infty) \left. \vphantom{A_3} \right\} \begin{matrix} f: \searrow \\ f: \searrow \end{matrix} \Rightarrow f(A_3) = (0, \frac{1}{2})$$

$$f(D_f) = [-\frac{1}{2}, 0) \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

1^η περίπτωση $\alpha \neq 0$

$$\alpha^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2} \geq f(x) \Rightarrow f(x) < \frac{1}{2} + \alpha^2$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ είναι αδύνατη2^η περίπτωση $\alpha = 0$

Η εξίσωση γράφεται $f(x) = \frac{1}{2}$ που έχει μοναδική ρίζα το $x = 1$, γιατί στο $x = 1$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο

Γ3.

i.

$$\begin{aligned} I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+2+1}}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} \end{aligned}$$

$$\text{ii. } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2} \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$I_0 + I_{0+1} = \frac{1}{2 \cdot 0+2} \Rightarrow \frac{\ln 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

$$I_1 + I_{1+1} = \frac{1}{2 \cdot 1+2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έστω $h(x) = g(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$

Με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και h' συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η h είναι γνησίως μονότονη.

$$h(-1) = g(-1) - 1 < 0$$

$$h(0) = g(0) > 0$$

h συνεχής στο $[-1, 0]$

$$h(-1)h(0) < 0$$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$$

και είναι μοναδικό γιατί h γνησίως μονότονη.

Δ2.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x)+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x(g(x) + x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\kappa x}{x} \right) \Rightarrow$$

$$0 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - \kappa \Rightarrow \kappa = 3$$

Δ3.

i.

Για $x > 0$

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3$$

$$f''(x) = -2\eta\mu x - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x} 2\sigma\upsilon\nu x(-\eta\mu x) = -2\eta\mu x + \frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} =$$

$$= 2\eta\mu x \left(-1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \right) = 2\eta\mu x \left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \right) \geq 0 \text{ για } x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right)$$

Άρα f' γνησίως αύξουσα

Άρα για $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα

Άρα για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$$

$$A_2 = \left[0, \frac{\pi}{2} \right) \Bigg\} \Rightarrow f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

$\frac{\pi}{3} \in f(A_2)$, άρα υπάρχει $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 3f(x_2) = \pi$ και είναι μοναδικό γιατί f γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$

Δ4.

i.

h συνεχής στο $[0, x_1]$

h παραγωγίσιμη στο $(0, x_1)$

άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x_1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(x_1) - h(0)}{x_1 - 0} = \frac{0 - g(0)}{x_1} > 0$$

Η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα h γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Άρα για $x \geq x_1 \Rightarrow h(x) \geq h(x_1) \Rightarrow g(x) + x \geq 0 \Rightarrow x^2(g(x) + x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

ii.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{f(x_2)} f(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln\sigma\upsilon\nu x - 3\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = -2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \ln\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - 3\frac{\frac{9}{4}}{2} - (-2\sigma\upsilon\nu 0 - \ln\sigma\upsilon\nu 0 - 0) \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} - (-2 \cdot 1 - \ln 1) \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 2, \quad (1)$$

$$\text{Άρα } \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx =$$

$$= 0 - x_1^3 g(x_1) - 3 \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx = -x_1^3(-x_1) - 3 \left(\frac{x_1^4}{4} - 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 2 \right) =$$

$$= x_1^4 - \frac{3x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$

Επιμέλεια Απαντήσεων
Βλόντζος Γεώργιος
Τριβιζαδάκης Μανώλης